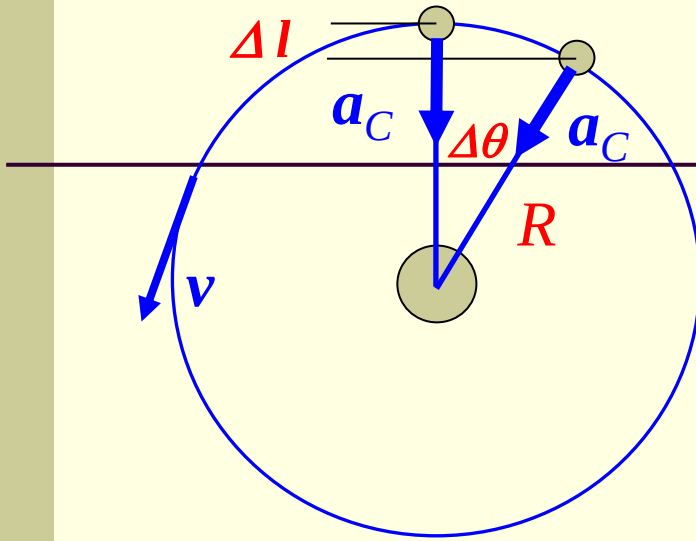


ЛЕКЦИЯ 17.

Наша планета Земля.

А.И. Валишев, В.Г. Сербо.

35. Невесомость.



При движении спутника массы m по орбите:

$$\vec{F}_C = \vec{F}_G, \rightarrow \frac{mv^2}{R} = G \frac{Mm}{R^2}, \Rightarrow$$

центростремительное ускорение a_c :

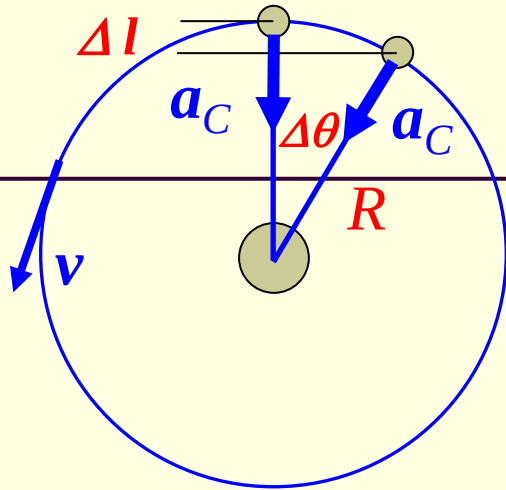
$$a_c = \frac{v^2}{R} = G \frac{M}{R^2}$$

За малое время Δt , пройдя вдоль окружности путь $v \cdot \Delta t$, спутник поворачивается на угол:

$$\Delta\theta = \frac{v\Delta t}{R};$$

Смещение по «вертикали» за это время составит:

35. Невесомость.

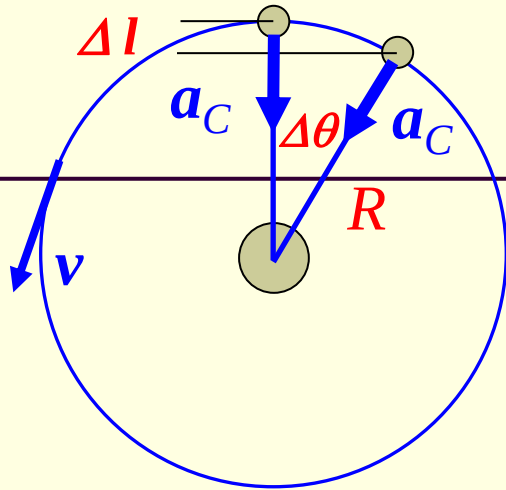


Смещение по вертикали Δl :

$$\begin{aligned}\Delta l &= R(1 - \cos \Delta \theta) = R \left(1 - \left(1 - \frac{\Delta \theta^2}{2} \right) \right) = \\ &= R \frac{\Delta \theta^2}{2} = R \frac{v^2 \Delta t^2}{2R^2} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{R} \Delta t^2\end{aligned}$$

Но это ровно столько, сколько прошло за время Δt свободно падающее на Землю тело!

35. Невесомость.



Спутник непрерывно падает на Землю, но, двигаясь по орбите, успевает сместиться вдоль нее ровно настолько, чтобы его расстояние до Земли не изменилось.

Любое тело внутри спутника «поступает» так же, поэтому нет давления на опору – спутник и тела в нем в «невесомости»!

Вопрос. Можно ли создать такое состояние в доступных нам условиях?

36. Приливные силы.

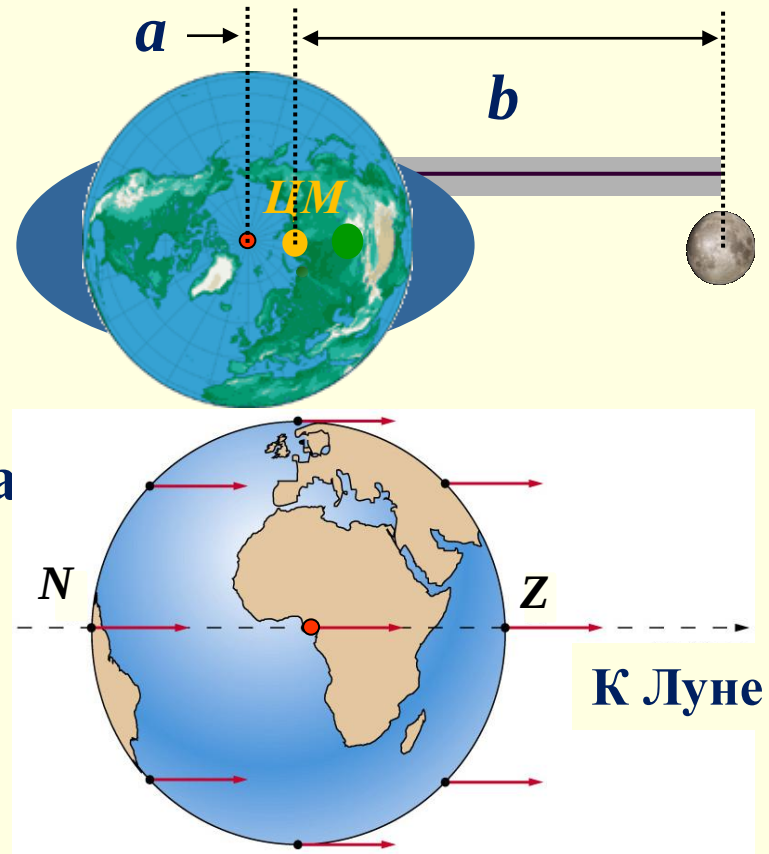
Пренебрегаем влиянием Солнца.

Считаем, что все приливные явления обусловлены только взаимодействием с Луной.

Орбитальное движение Луны происходит относительно центра масс (*ЦМ*) Земля-Луна.

ЦМ смещен относительно геометрического центра Земли. Земля в системе *ЦМ* движется с центростремительным ускорением a_C . Действительно:

$$M_{Moon}\omega^2 a = M_{Earth}\omega^2 b = G \frac{M_{Moon}M_{Earth}}{(a+b)^2}, \quad \omega^2 b = a_C;$$
$$a_C = G \frac{M_{Moon}}{(a+b)^2} = G \frac{M_{Moon}}{d^2}$$



36. Приливные силы.

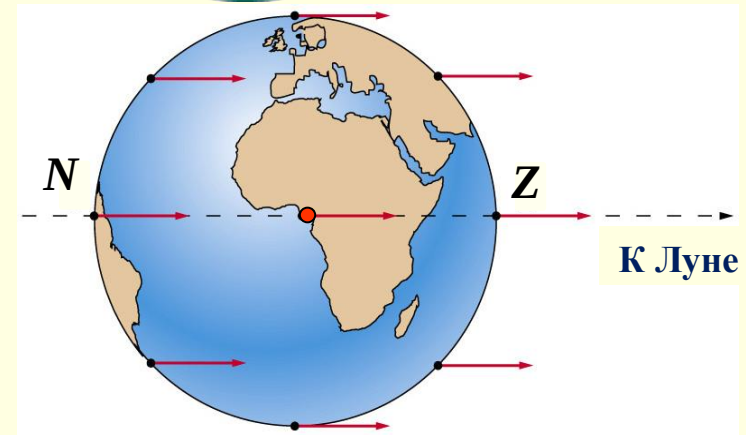
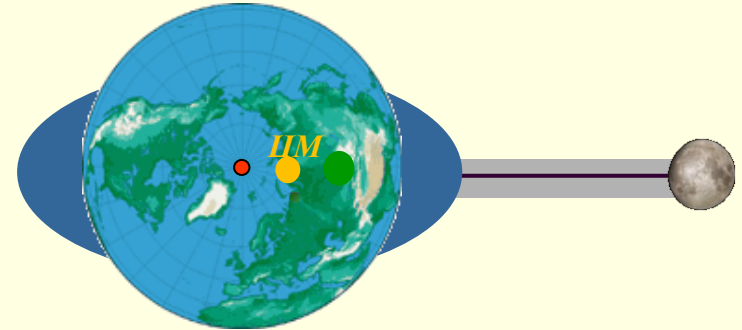
Земля в системе **ЦМ** движется с центростремительным ускорением a_C :

$$a_C = G \frac{M_M}{d^2} = \vec{a}_0 ,$$

Здесь M_M – масса Луны,
 d – радиус орбиты Луны.

Система отсчета «Земля» является НЕинерциальной. При рассмотрении уравнения движения в НЕинерциальной системе отсчета следует вычесть силу инерции:

$$F_i = ma_0 = ma_C .$$



$$\vec{F}' = m\vec{a}' = \sum \vec{F} - m\vec{a}_0$$
$$F_i = ma_0 ;$$

a_0 – ускорение
НЕинерциальной системы

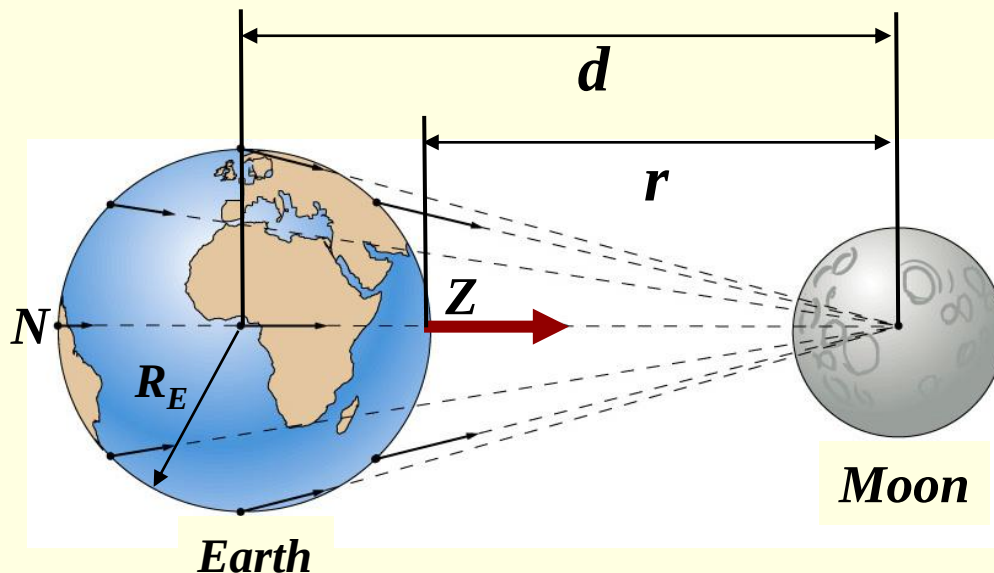
36. Приливные силы.

На тело массы m , расположенное на поверхности Земли ближе к Луне действует «приливная» сила, которая

(за вычетом Земной силы тяжести) –
есть сила притяжения со стороны Луны – минус сила инерции:

Приливная сила $F' = m (a_{G \text{ Moon}} - a_C)$

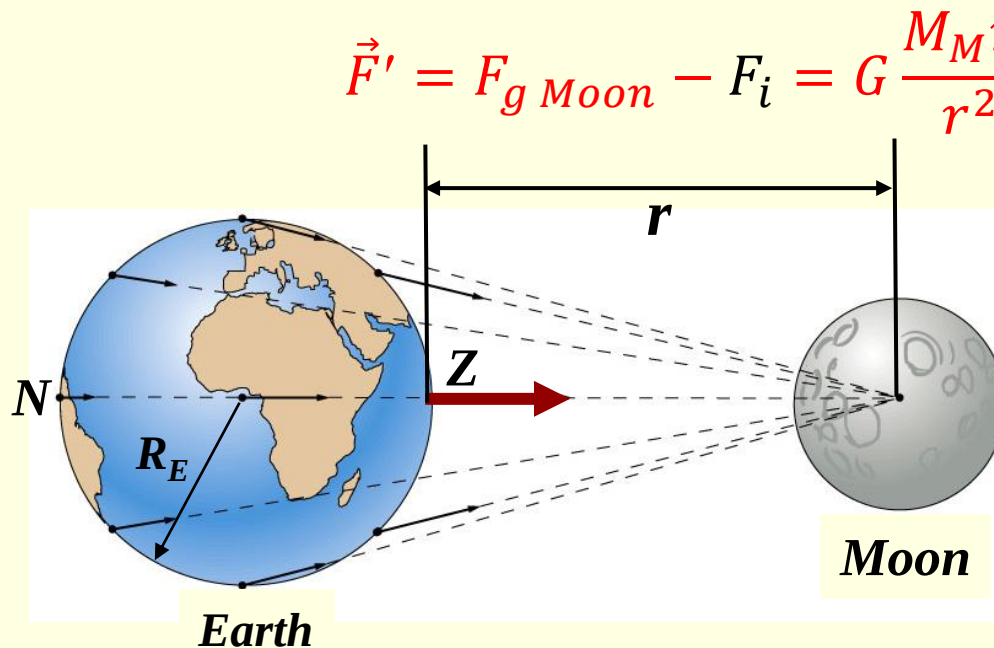
$$\vec{F}' = F_{g \text{ Moon}} - F_i = G \frac{M_M m}{r^2} - G \frac{M_M m}{d^2}$$



d – расстояние между центрами Земли - Луны.

36. Приливные силы.

Приливная сила $\vec{F}' = m (a_{G \text{ Moon}} - a_{C \text{ Moon}})$



$$\vec{F}' = F_{g \text{ Moon}} - F_i = G \frac{M_M m}{r^2} - G \frac{M_M m}{d^2}$$

d – расстояние между центрами Земли - Луны.

В точке Z :

$$\begin{aligned} F_Z' &= m a'(Z) = G \frac{M_M m}{(d - R_E)^2} - G \frac{M_M m}{d^2} = \\ &= G \frac{M_M m}{d^2} \left[\frac{d^2}{(d - R_E)^2} - 1 \right] \end{aligned}$$

36. Приливные силы.

Считая $R_E \ll d$, разлагая полученное выражение по малости:

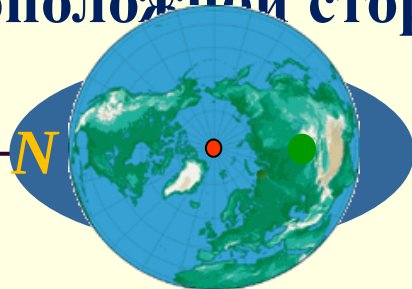
$$F_Z' = Gm \frac{M_M}{d^2} \left[\frac{1}{(1 - R_E/d)^2} - 1 \right] \approx \\ \approx Gm \frac{M_M}{d^2} \left[1 + \frac{2R_E}{d} - 1 \right] = 2Gm \frac{M_M R_E}{d^3}$$

Сила на лицевой поверхности к Луне немного больше силы тяжести, приливный горб – к Луне.

*Интересно отметить, что приливы очень малой амплитуды имеют место и в Земной коре. Так на ускорителе LEP (ускоритель электронов) в CERN(e) с длиной вакуумной камеры 27 км, в которой двигались электроны это приводило к суточным вариациям энергии электронов из-за изменения длины вакуумной камеры при неизменных значениях ускоряющих полей.

36. Приливные силы.

На противоположной стороне диаметра Земли (т. N) :



В точке N :

$$F_N' = m a'(N) = G \frac{M_M m}{(d + R_E)^2} - G \frac{M_M m}{d^2} =$$
$$G \frac{M_M m}{d^2} \left[\frac{d^2}{(d + R_E)^2} - 1 \right] = - 2 G m \frac{M_M R_E}{d^3} . \quad (f)$$

Сила немного меньше!, приливный горб – от Луны (знак силы противоположный). Оценка высоты прилива по порядку величины, здесь m_E – масса Земли :

$$\frac{\delta R_E}{R_E} \sim \frac{F_{g \text{ Moon}}}{F_{g \text{ Earth}}}; \quad \rightarrow \quad \delta R_E \sim R_E \frac{M_M}{m_E} \left(\frac{R_E}{d} \right)^2 \sim 0,36 \text{ м.}$$

Наиболее высокие приливы наблюдаются в мелководных Беринговом и Охотском морях. Рекордная разность высот ΔH «низкой» – «высокой» воды в заливе Фанди, Канада – $\Delta H \approx 18 \text{ м!}$

36. Приливные силы.

Вулканическая активность на Ио, спутнике Юпитера, обусловлена разогревом вещества из-за приливных сил со стороны Юпитера, Ганимеда и Европы.

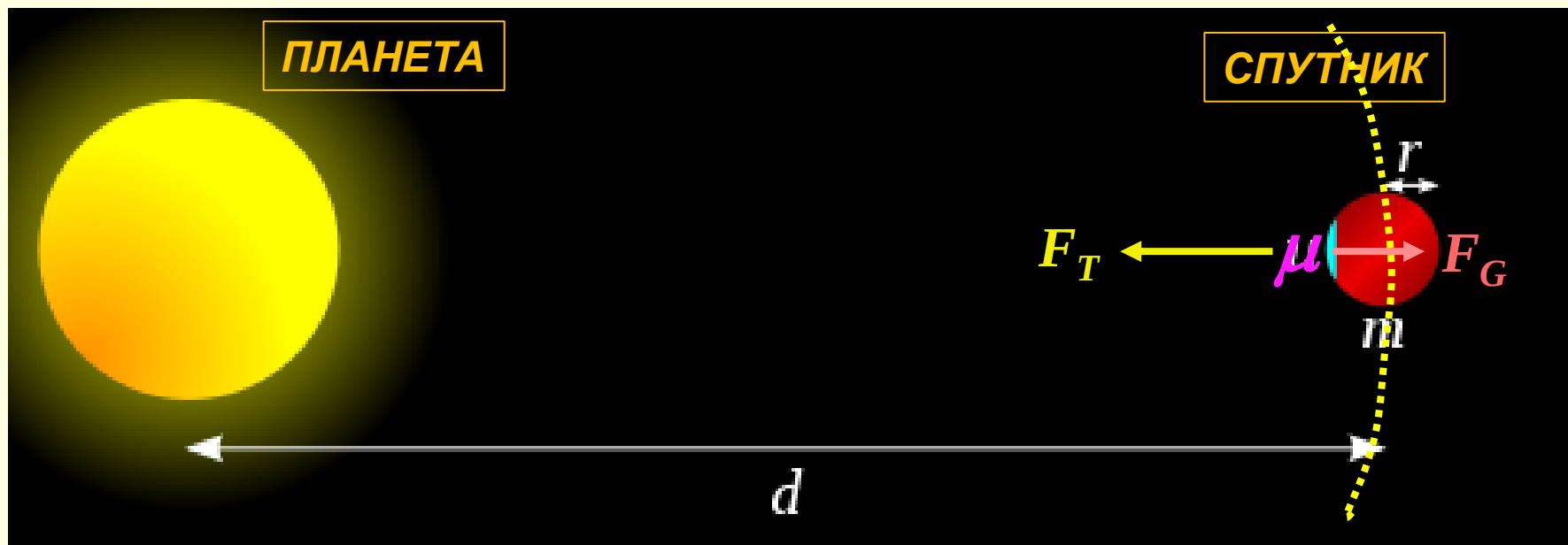


37. Сфера Роша'.

Оценим радиус сферы d (сфера Роша'), внутри которой спутник планеты, вещество которого удерживается только силами гравитационного притяжения, существовать не может.

Сила притяжения F_G небольшой массы μ , находящейся вблизи поверхности спутника радиуса r , массы m :

$$F_G = G \frac{m\mu}{r^2}.$$



37. Сфера Роша'.

Ранее показано, со стороны центрального тела массы M на элемент массы спутника μ действует приливная сила:

$$F_T = 2G \frac{M\mu r}{d^3}.$$

Радиус сферы Роша d определяется из условия равенства сил: $F_G = F_T$.

$$G \frac{m\mu}{r^2} = 2G \frac{M\mu r}{d^3}, \quad \rightarrow \quad d = r \left(2 \frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Выполним оценки.

Предполагаем: плотность центрального массивного тела ρ_M , плотность вещества спутника ρ_m -

$$M = \rho_M \cdot \frac{4\pi R^3}{3}; \quad m = \rho_m \cdot \frac{4\pi r^3}{3}.$$

37. Сфера Роша.

Нетрудно получить радиус сферы Роша d как функцию радиуса центрального тела и отношения плотностей ρ_M / ρ_m

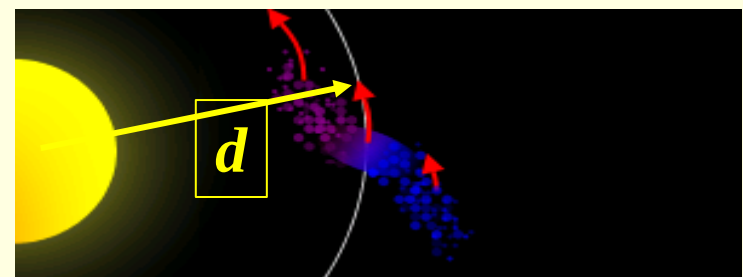
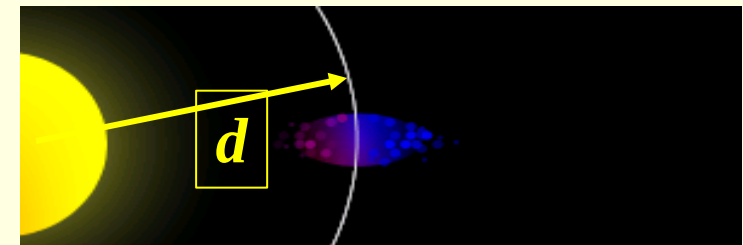
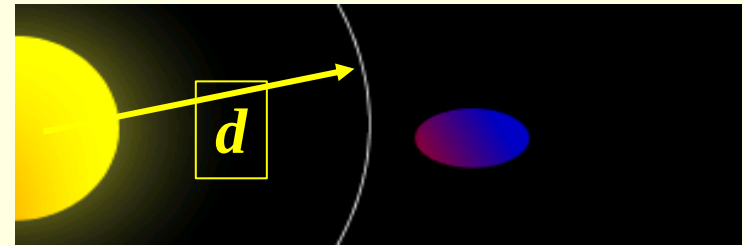
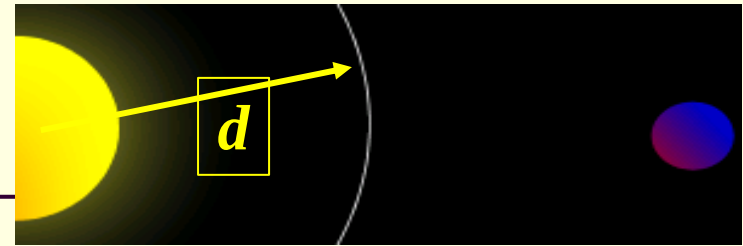
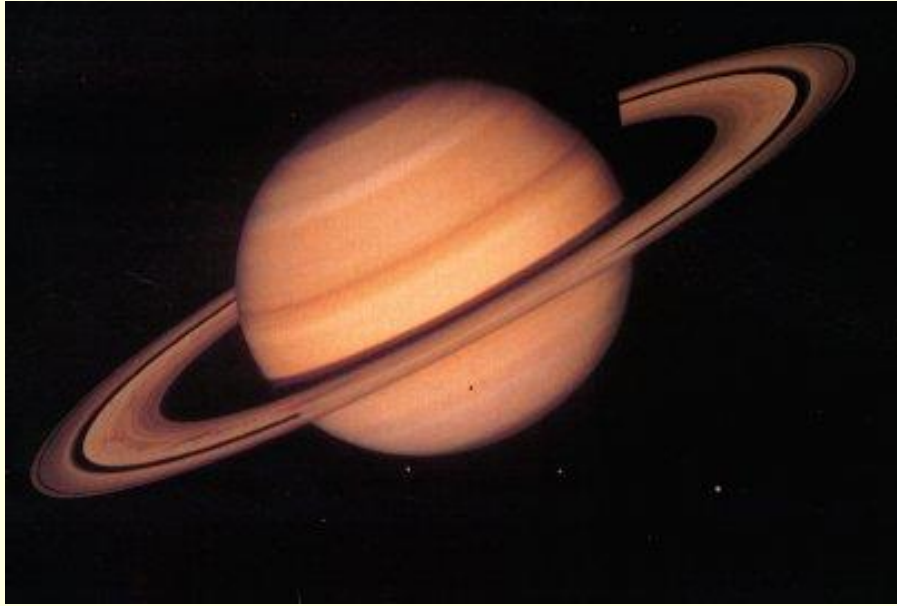
$$d = r \left(2 \frac{M}{m} \right)^{\frac{1}{3}} = r \left(2 \frac{\rho_M R^3}{\rho_m r^3} \right)^{\frac{1}{3}} = R \left(2 \frac{\rho_M}{\rho_m} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

Различие в орбитальных скоростях частей «разорванного», фрагментированного тела приводит к тому, что эти частицы формируют кольцо.



37. Сфера Роша.

Моделирование динамики
разрушения кометы.



37. Влияние притяжения Солнца на вращение Земли вокруг оси

Угол наклона земной оси относительно нормали к плоскости орбиты (плоскости эклиптики) $\varepsilon = 23.5^\circ$.

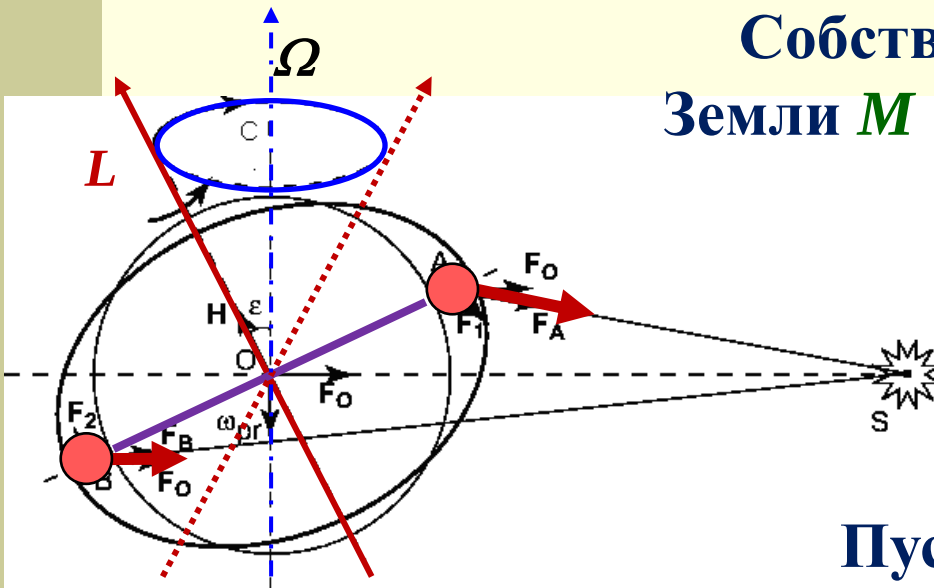
Этот наклон, в сочетании с несферичностью Земли приводит к возникновению момента сил, вследствие гравитационного взаимодействия Земли и Солнца.



37. Влияние притяжения Солнца на вращение Земли вокруг оси

Перейдем в систему отсчета, связанную с Землей. В этой системе Солнце крутится вокруг Земли.

Собственный момент импульса Земли $\mathbf{M}$ в этой системе не меняется
 $d\mathbf{M}/dt = 0,$



Модель несферичности Земли.

Пусть K – момент сил,
действующих на Землю со стороны
Солнца.

**Угловая скорость прецессии Ω
связана с собственным моментом
импульса Земли M :**

$$\Omega \times M = K. \quad (X)$$

37. Влияние притяжения Солнца на вращение Земли вокруг оси

Поворот момента импульса Земли происходит вследствие действия момента сил со стороны Солнца.

Модуль $|M| = \text{const}$. Из соотношения (X) получим величину угловой скорости прецессии Ω :

$$\Omega = K / M \sin \varepsilon.$$

Определим K – момент гравитационных сил со стороны Солнца на несферическую Землю.

Выполним оценки Ω , моделируя несферичность Земли гантелькой длины диаметра Земли, на концах которого находятся «избытки» массы

$$\delta m \sim m_E (\delta R_E / R_E).$$

37. Влияние притяжения Солнца на вращение Земли вокруг оси

По аналогии с рассмотрением приливных сил считаем, что на каждую массу гантельки действует избыток силы-

$$\begin{aligned} F &= G \frac{M_{\odot} \delta m}{(d - R_E \cos \varepsilon)^2} - G \frac{M_{\odot} \delta m}{d^2} \approx \\ &\approx G \frac{M_{\odot} \delta m}{d^2} \left(1 + 2 \frac{R_E \cos \varepsilon}{d} \right) - G \frac{M_{\odot} \delta m}{d^2} \\ &= 2G \frac{M_{\odot} \delta m}{d^3} R_E \cos \varepsilon ; \end{aligned}$$

Здесь $M_{\odot}$ – масса Солнца,

d – радиус Земной орбиты, R_E – радиус Земли.

Окончательно, момент сил притяжения Солнца:

$$K = 2F \cdot R_{\perp} = 2F \cdot R_E \sin \varepsilon$$

37. Влияние притяжения Солнца на вращение Земли вокруг оси

После подстановки в K сил, действующих на «плечи» гантельки получаем оценку:

$$K = (4)G \frac{M_{\odot} \delta M}{d^3} R_E^2 \cos \varepsilon \cdot \sin \varepsilon \quad -?$$

Полученная оценка неточна. Моделирование несферичности точечными массами на концах Земного диаметра достаточно грубое. Более аккуратный и точный расчет дает значение численного коэффициента в формуле вместо «4», всего (3/5).

По - прежнему считая в первом приближении:

$$\frac{\delta m}{m_E} \cong \frac{\delta R_E}{R_E} ,$$

получаем более точный момент сил K :

$$K = \left(\frac{3}{5}\right) G \frac{M_{\odot} \delta m}{d^3} R_E^2 \cdot \cos \varepsilon \cdot \sin \varepsilon .$$

Собственный момент импульса Земли определяется как (Земля однородный шар):

$$M = I\omega = (2/5) \cdot m_E R_E^2 \cdot \omega .$$

ω - угловая скорость суточного вращения Земли

37. Влияние притяжения Солнца на вращение Земли вокруг оси

Из (X) находим угловую скорость прецессии Ω :

$$\begin{aligned}\Omega &= \frac{K}{M \sin \varepsilon} = \frac{K}{I \omega \sin \varepsilon} \\ \Omega &= \frac{K}{(2/5) \cdot m_E R_E^2 \omega \sin \varepsilon} = \frac{3}{2} \cdot G \frac{M_\odot}{d^3 \omega} \cdot \frac{\delta m}{m_E} \cos \varepsilon = \\ &= \frac{3}{2} \cdot G \frac{M_\odot}{d^3} \cdot \frac{\delta R_E}{R_E} \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\omega} =\end{aligned}$$

Вошедшая в ответ комбинация: $GM_\odot/d^3 = \omega^2$ - квадрат угловой скорости годичного обращения Земли вокруг Солнца! $2\pi/\omega = T_{\text{год}}$.

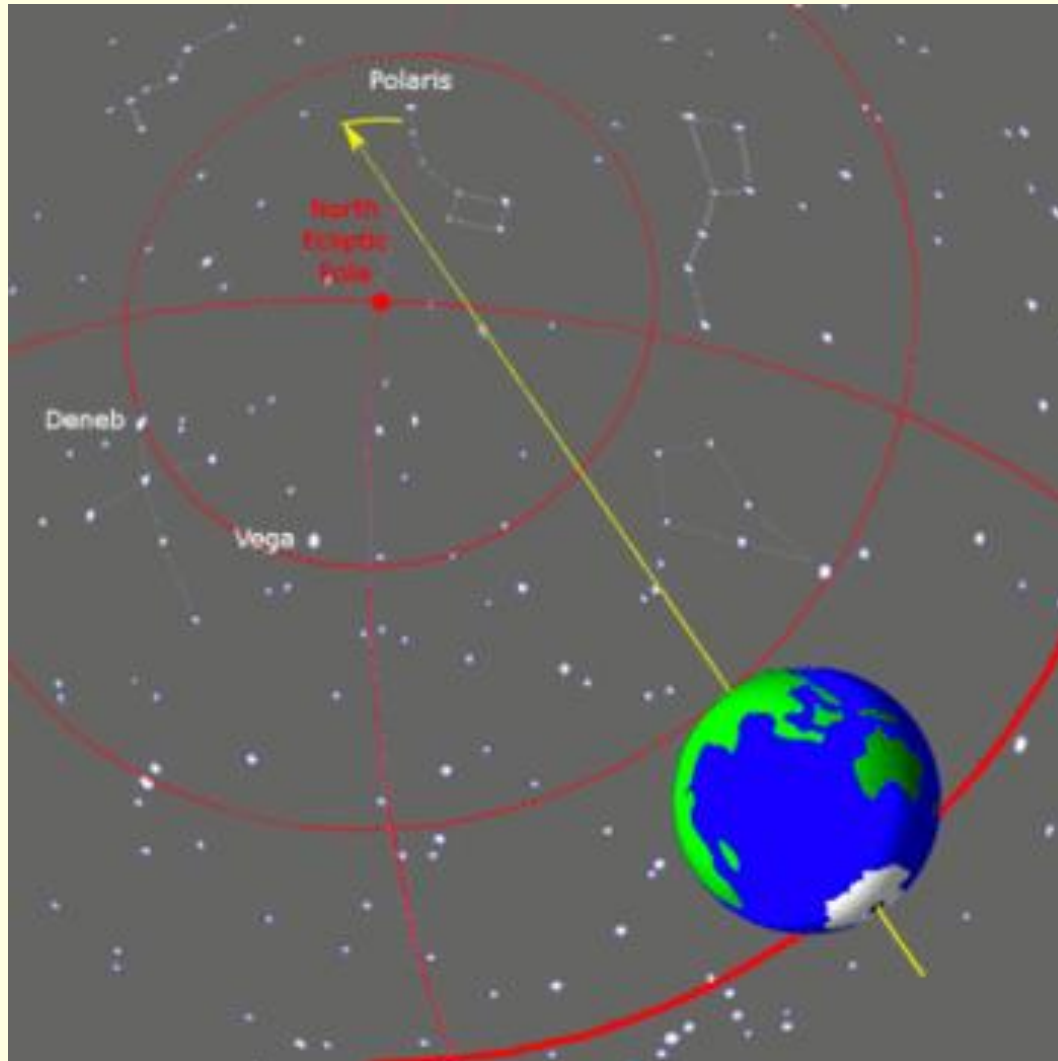
С учетом ω^2 определяем период прецессии Земной оси

$$T_{\text{прец}} = 2\pi/\Omega:$$

$$\begin{aligned}T_{\text{прец}} &= \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2}{3} \cdot \frac{T_{\text{год}}^2}{T_{\text{сутки}}} \left(\frac{\delta R}{R_E} \right)^{-1} \frac{1}{\cos \varepsilon} = \\ &= \frac{2}{3} \cdot T_{\text{год}} \left(\frac{365}{1} \right) \left(\frac{1}{1/300} \right) \cdot \frac{1}{0.92} \approx 8 \times 10^4 \text{ лет!}\end{aligned}$$

37. Влияние притяжения Солнца на вращение Земли вокруг оси

Учет влияния Луны уменьшает найденный период прецессии до $T_{\text{прец}} \approx 20 \text{ тыс. лет.}$



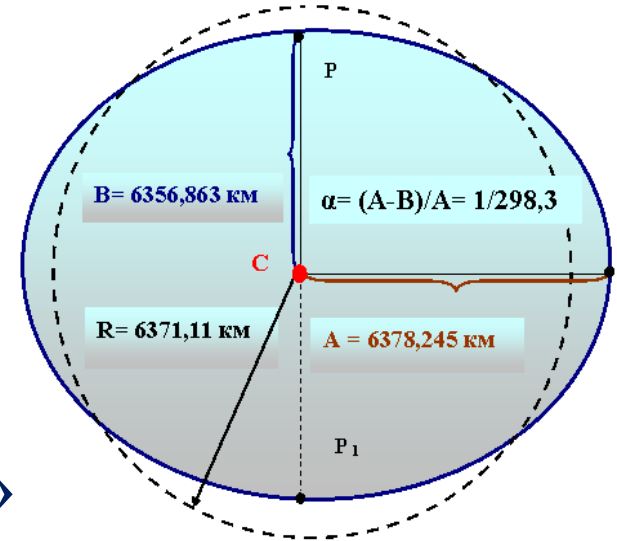
38. Планета Земля как симметричный волчок...

Из-за вращения Земля принимает форму сплюснутого шара.

Ускорение свободного падения на полюсе: $g_p = -Gm_E/R_p^2$,
на экваторе: $g_e = -Gm_E/R_e^2$.
За разницу величин $g_p - g_e$ «отвечает» центробежное ускорение на экваторе (m_E – масса Земли, v_e – скорость точки на экваторе).
Оценим относительную разность $\Delta R/R_E$.

Предварительно, период обращения по поверхности Земли:

$$\frac{mv^2}{R_E} = G \frac{m_E m}{R_E^2} \Rightarrow v = \sqrt{G \frac{m_E}{R_E}} \Rightarrow$$
$$T = \frac{2\pi R_E}{v} = 2\pi \sqrt{\frac{R_E^3}{Gm_E}} = 1.41 \text{ час}$$



С – центр Земли
В – малая полуось эллипсоида
А – большая полуось эллипсоида
 α – сжатие Земли.

$$\Delta R = \frac{6370}{300} \approx 21 \text{ км}$$

38. Планета Земля как симметричный волчок...

Оценим относительную разность
 $\Delta R/R_E$.

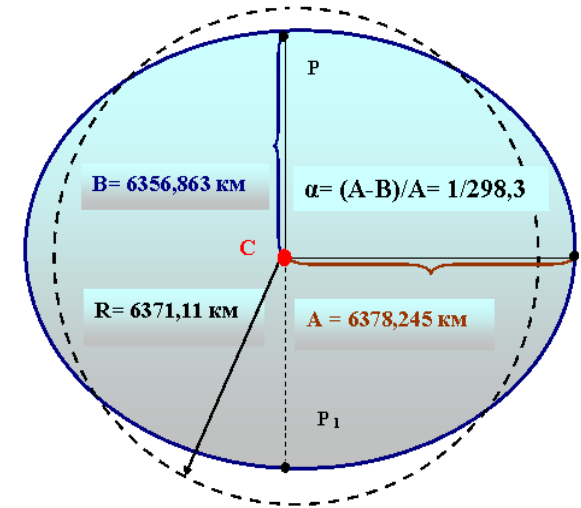
$$Gm_E \left(\frac{1}{R_p^2} - \frac{1}{R_e^2} \right) = \frac{v_e^2}{R_e^2} R_E = \omega_z^2 R_E = Gm_E \frac{\Delta R}{R_E^3} ;$$

$$\frac{\Delta R}{R_E} = \frac{\omega_z^2 R_E^3}{Gm_E} =$$

$$= \left[2\pi \sqrt{\frac{R_E^3}{Gm_E}} \right]^2 \cdot \left(\frac{\omega_z}{2\pi} \right)^2 = \frac{1.41^2}{24^2} \approx \frac{1}{300}.$$

период обращения
 спутника у
 поверхности Земли,

Земные сутки



С- центр Земли

В- малая полуось эллипсоида

А – большая полуось эллипсоида

α – сжатие Земли.

$$\Delta R = \frac{6370}{300} \approx 21 \text{ км}$$

38. Планета Земля как симметричный волчок...

Угловая скорость вращения Земли вокруг своей оси

$$\omega_z = 2\pi/T = 6.28/(24 \cdot 3600) = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ сек}^{-1},$$

Поэтому частота прецессии Земной оси вследствие сплюснутости (другая по сравнению с Солнечной):

$$\omega_{\text{прец}} = \frac{I_z - I}{I} \omega_z = \frac{\Delta R}{R_E} \omega_z \approx \frac{7.3 \times 10^{-5}}{300} = 2.4 \cdot 10^{-7} \text{ с}^{-1}$$

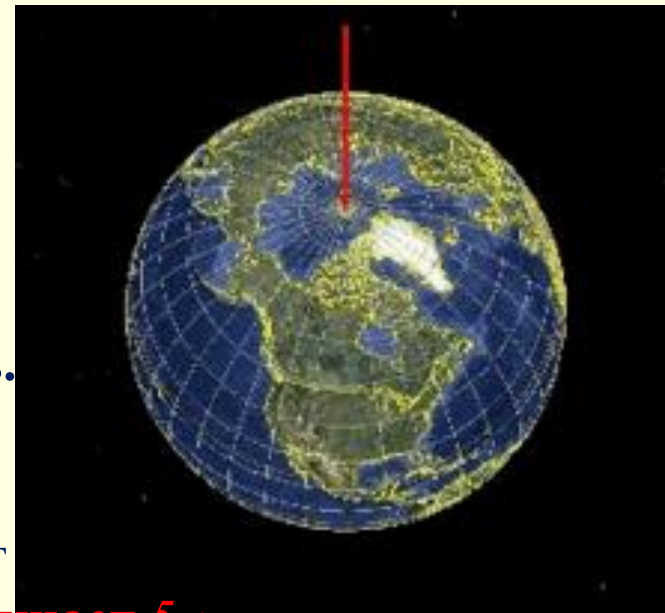
$$T_{\text{прец}} = \frac{2\pi}{\omega_{\text{прец}}} = 2.6 \cdot 10^7 \text{ с} \approx 300 \text{ сут.}$$

Частота прецессии $\omega_{\text{прец}}$ соответствует периоду $T_{\text{прец}}$ около 300 дней.

Реально измеренное значение с хорошей точностью $T_{\text{прец}} \cong 440$ дням.

Разницу связывают с неоднородностью Земли и другими явлениями, типа приливов.

Максимальное расстояние точки земной поверхности, через которую проходит ось вращения, от точки, через которую проходит ось симметрии на северном полюсе **не превышает 5 м.**



38. *Будущее системы Земля-Луна...

Измерения сегодня показывают, что *каждый год Луна удаляется примерно на 4 см ; день удлиняется на $7 \cdot 10^{-4}$ секунды за столетие.*

До окончания процесса еще примерно 5 миллиардов лет – больше, чем возраст Земли равный 4.5 миллиарда лет...

Смоделируем динамику изменения орбитального движения Луны.

Введем обозначения: M и m - массы Земли (E) и Луны (M), соответственно,

ω_E - угловая скорость вращения Земли вокруг собственной оси,

ω_M – угловая скорость вращения Луны вокруг Земли, $\omega_E / \omega_M \approx 28$

ω_f – конечная угловая скорость обоих вращений,

R – расстояние от Земли до Луны сегодня,

R_f – конечное расстояние между ними.

Считаем: Луна материальная точка, Земля – однородный шар радиуса a .

В настоящее время расстояния от центра инерции системы Земля–Луна до Земли: $r_E = m R / (M + m)$; до Луны $r_M = M R / (M + m)$ соответственно.

38. *Будущее системы Земля-Луна...

Начальный момент импульса системы M_i :

$$\begin{aligned} M_i &= mr_M^2 \omega_M + Mr_E^2 \omega_M + I \omega_E = \\ &= m \left(\frac{MR}{m+M} \right)^2 \omega_M + M \left(\frac{mR}{m+M} \right)^2 \omega_M + I \omega_E . \end{aligned}$$

$$M_i = J_i \omega_M + I \omega_E ; \quad J_i = \left(\frac{mM}{m+M} \right) R^2 , \quad I = \frac{2}{5} Ma^2 .$$

В то время, когда сутки сравняются с месяцем, т.е. угловая скорость вращения Земли и угловая скорость обращения Луны станут одинаковыми, равными ω_f расстояние Земля – Луна, согласно 3-му закону Кеплера станет:

$$\left(\frac{R_f}{R} \right)^3 = \left(\frac{T_f}{T} \right)^2 = \left(\frac{\omega_M}{\omega_f} \right)^2 \Rightarrow R_f = R \left(\frac{\omega_M}{\omega_f} \right)^{\frac{2}{3}} ;$$

Запишем закон сохранения момента импульса системы Земля – Луна с учетом изменения расстояния З – Л и изменения частоты обращения:

$$M_i = J_i \omega_M + I \omega_E = M_f = (J_f + I) \omega_f ;$$

38. *Будущее системы Земля-Луна...

Здесь момент инерции системы относительно центра масс

$$J_f = \left(\frac{mM}{m+M} \right) R_f^2 = \left(\frac{mM}{m+M} \right) R^2 \left(\frac{\omega_M}{\omega_f} \right)^{\frac{4}{3}} = J_i \left(\frac{\omega_M}{\omega_f} \right)^{\frac{4}{3}}.$$

Окончательно, закон сохранения момента импульса:

$$J_i \omega_M + I \omega_E = \left(J_i \left(\frac{\omega_M}{\omega_f} \right)^{\frac{4}{3}} + I \right) \omega_f.$$

Разделив обе части на равенства на ω_E , обозначив $x = \omega_f / \omega_E$ имеем уравнение (1):

$$I + J_i \frac{\omega_M}{\omega_E} = \left(J_i \left(\frac{\omega_M}{\omega_f} \right)^{\frac{4}{3}} + I \right) \frac{\omega_f}{\omega_E};$$
$$x(1 + k - x)^3 = k^3 \frac{\omega_M}{\omega_E}; \quad (1)$$

Введены обозначения:

$$k = \frac{J_i \omega_M}{I \omega_E} = \frac{(mM/m+M)R^2}{(2/5)Ma^2} \cdot \frac{\omega_M}{\omega_E} \approx 3.8;$$

Решаем алгебраическое уравнение (1) численно:

$$x(4.8 - x)^3 = 2.01$$

38. *Будущее системы Земля-Луна...

Уравнение (1) имеет два действительных корня:

$$x_1 = \left(\frac{\omega_f}{\omega_E} \right)_1 \approx \frac{1}{55}, \quad x_2 = \left(\frac{\omega_f}{\omega_E} \right)_2 \approx 4;$$

Первый корень соответствует будущему. Второй корень – прошлому. Это означает, что, в конце концов, в будущем длина суток (и месяца!) будет равняться нынешним 55 дням..!

Расстояние между Землей и Луной вырастет до:

$$R_f = R \left(\frac{\omega_M}{\omega_f} \right)^{\frac{2}{3}} = R \left(\frac{\omega_M}{x\omega_E} \right)^{\frac{2}{3}} = R \left(\frac{55}{28} \right)^{\frac{2}{3}} \approx 1.6 R \cong 6 \cdot 10^5 \text{ км.}$$

Второй корень уравнения $x_2 \approx 4$.

Месяц в прошлом равен 6 часам.

Расстояние между Землей и Луной в прошлом:

$$R \approx 2.6 a. \quad a - \text{радиус Земли.}$$

38. *Будущее системы Земля-Луна...

Опытные данные:

Измерения сегодня показывают, что *каждый год Луна удаляется примерно на 4 см ; день удлиняется на $7 \cdot 10^{-4}$ секунды за столетие.*

До окончания процесса еще примерно 5 миллиардов лет — больше, чем возраст Земли равный 4.5 миллиарда лет...

Приливные силы со стороны Земли на Луну давно сделали свое дело...



Synchronous Rotation of the Moon.flv

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!

<http://phys.nsu.ru/fit>

<http://el.nsu.ru>